Lösen von Gleichungen mittels Abspaltung von Linearfaktoren durch Polynomdivision (1)

Aufgabe:		$\left(x^3+5x^2+10x+12\right):\left(x+3\right)$
Lösung:	**1.)**	Man teilt zunächst nur die **höchsten Potenzen** von x: $\left(\boxed{x^3}+5x^2+10x+12\right):\left(\boxed{x}+3\right)=\boxed{x^2}$
▼▼▼▼▼▼▼ Die schriftliche Polynomdivision ist ein Verfahren, mit dem man Terme faktorisieren kann. Beim Lösen von Gleichungen haben wir gemerkt, dass sich Produkte dadurch auszeichnen, dass man oft die einzelnen Faktoren nacheinander betrachten kann. Leider hat man im Computerzeitalter die schriftliche Division oftmals schon verlernt – daher diese Anleitung. ▲▲▲▲▲▲▲	**2.)**	Natürlich sind wir noch nicht fertig – es ist zunächst der **Rest** zu bestimmen: $\left(x^3+5x^2+10x+12\right):\left(x+3\right)=x^2$ $\underline{\left(x^3+3x^2\right)}$ $\xleftarrow{\text{NR.: }(x+3)\cdot x^2}$ Dazu haben wir „rückwärts“ den ersten Summanden der Lösung mit dem Divisor multipliziert und das Zwischenergebnis linksbündig aufgeschrieben.
		Nun wird dieses **Zwischenergebnis** vom Divisor abgezogen: $\left(x^3+5x^2+10x+12\right):\left(x+3\right)=x^2$ $\underline{-\left(x^3+3x^2\right)}$ $2x^2$
	3.)	Nun geht das Spiel von vorne los. Zunächst füllt man die aktuelle Zeile wieder auf („**Runterholen**“): $\left(x^3+5x^2+10x+12\right):\left(x+3\right)=x^2$ $\underline{-\left(x^3+3x^2\right)}$ $2x^2+10x+12$
		Auch beim nächsten Divisionsschritt teilen wir nur die höchsten Potenzen: $\left(x^3+5x^2+10x+12\right):\left(\boxed{x}+3\right)=x^2\boxed{+2x}$ $\underline{-\left(x^3+3x^2\right)}$ $\boxed{2x^2}+10x+12$

Genau! Wieder berechnen wir den Rest …

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+5x^2+10x+12\right):\left(x+3\right)=x^2+2x \\
\underline{-\left(x^3+3x^2\right)} \\
\qquad\quad 2x^2+10x+12 \\
\qquad\quad 2x^2+\ 6x \qquad\qquad \xleftarrow{\text{NR.: }(x+3)\cdot 2x}
\end{array}
$$

… indem wir die Zwischenlösung subtrahieren:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+5x^2+10x+12\right):\left(x+3\right)=x^2+2x \\
\underline{-\left(x^3+3x^2\right)} \\
\qquad\quad 2x^2+10x+12 \\
\qquad \underline{-\left(2x^2+\ 6x\right)} \\
\qquad\qquad\qquad 4x
\end{array}
$$

Gleich ist es geschafft! Ich denke, ich kann mich bei den Zwischenschritten schon etwas kürzer fassen …

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+5x^2+10x+12\right):\left(\boxed{x}+3\right)=x^2+2x\boxed{+4} \\
\underline{-\left(x^3+3x^2\right)} \\
\qquad\quad 2x^2+10x+12 \\
\qquad \underline{-\left(2x^2+\ 6x\right)} \\
\qquad\qquad\qquad \boxed{4x}+12
\end{array}
$$

Wie man sieht, geht die Division ohne Rest auf:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+5x^2+10x+12\right):\left(x+3\right)=x^2+2x+4 \\
\underline{-\left(x^3+3x^2\right)} \\
\qquad\quad 2x^2+10x+12 \\
\qquad \underline{-\left(2x^2+\ 6x\right)} \\
\qquad\qquad\qquad 4x+12 \\
\qquad\qquad \underline{-\ \left(4x+12\right)} \qquad\qquad \xleftarrow{\text{NR.: }(x+3)\cdot 4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 0
\end{array}
$$

Man könnte die Lösung übrigens auch so schreiben:

$$x^3+5x^2+10x+12=\left(x+3\right)\cdot\left(x^2+2x+4\right)$$

Lösen von Gleichungen mittels Abspaltung von Linearfaktoren durch Polynomdivision (2)

Wir lösen die Gleichung $x^3+5x^2-2x-24=0$:

(1) Da nicht gegeben, suchen wir die erste Lösung mittels **Wertetabelle**. Falls dies nicht gelingt, ist die Gleichung vielleicht nur näherungsweise lösbar.
Wir stellen aber fest: $x_1 = 2$

(2) Daraus basteln wir uns einen **Linearfaktor**. Er heißt (x-2) und wird Null, wenn man die zuerst gefundene Lösung darin einsetzt.

(3) Der Term auf der linken Seite unserer Gleichung ist durch diesen Linearfaktor **teilbar**. Dabei darf **kein Rest** bleiben!

(4) Das Teilen geschieht mittels **Polynomdivision**:

$$\begin{array}{l}
\left(x^3+5x^2-2x-24\right):\left(x-2\right)=\underline{\underline{x^2+7x+12}} \\
\underline{-\left(x^3-2x^2\right)} \\
\qquad 7x^2-2x \\
\quad \underline{-\left(7x^2-14x\right)} \\
\qquad\qquad 12x-24 \\
\qquad\quad \underline{-\left(12x-24\right)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l}
x^3:x=x^2 \\
x^2\cdot\left(x-2\right)=x^3-2x^2 \\
7x^2:x=7x \\
7x\cdot\left(x-2\right)=7x^2-14x \\
12x:x=12 \\
12\cdot\left(x-2\right)=12x-24
\end{array}\right)$$

(5) Das Ergebnis der Polynomdivision wird nun auf **weitere Lösungen** hin untersucht. Dabei können alle oben genannten Lösungsverfahren zum Einsatz kommen.

$$0=x^2+7x+12$$

$$x_{2,3}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-12}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} x_2=-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=-3 \\ x_3=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=-4 \end{array}$$

(6) **<u>Lösungsmenge:</u>** $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -4$

Übungsaufgaben (3)

(1)
Berechnen Sie mittels Polynomdivision :

$(x^3 - 3x^2 + 2x) : (x - 1)$ *(x^2-2x)*
$(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (x + 1)$ *(x^2+x-2)*
$(2x^3 + 9x^2 + 10x + 3) : (2x + 1)$ *(x^2+4x+3)*
$(x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2) : (x^2 - 1)$ *(x^2+3x+2)*
$(2x^4 + 5x^3 - 29x^2 - 17x + 15) : (2x - 1)$ *($x^3+3x^2-13x-15$)*

Nach Lösungen für Gleichungen ist hier nicht gefragt!

(2)
Berechnen Sie durch Umformen, Ausklammern, Anwenden von Lösungsformeln, systematisches Überlegen oder Polynomdivision die Lösungen von

$0 = 3x^2 + 6x - 9$ *(-3 ; 1)*
$0 = (x-2)\cdot(2x+1)\cdot(3x-2)$ *(-0,5 ; $^2/_3$; 2)*
$0 = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ *(-1,5 ; -1 ; 1)*
$0 = 6x^3 + x^2 - 2x$ *(-$^2/_3$; 0,5 ; 0)*
$0 = 6x^3 + 19x^2 + x - 12$ *(-1 ; 0,595 ; -1,679)*